

# Exercices de Physique (niveau spé)

Romain Madar

4 avril 2008

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Thermodynamique</b>	<b>3</b>
1.1	Transformations réversibles et irréversibles . . . . .	3
1.2	Utilisation du facteur de Boltzmann . . . . .	3
1.3	Théorie cinétique des gaz . . . . .	3
1.4	Théorie cinétique des gaz : effusion . . . . .	4
1.5	Eau liquide en dessous de $0^{\circ}C$ , compréhensible? . . . . .	4
1.6	Diffusion thermique et création d'entropie . . . . .	5
1.7	Autour des capacités thermiques ... . . . .	5
1.8	Le noir "absorbe" la chaleur ... pourquoi ça? . . . . .	6
1.9	Rayonnement d'équilibre thermique . . . . .	7
1.10	Attention, ça déborde ...! . . . . .	7
1.11	Pression osmotique . . . . .	8
1.12	Thermodynamique et réaction chimique . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Mécanique</b>	<b>9</b>
2.1	Le problème à deux corps et applications . . . . .	9
2.2	Mesure de $G$ par l'expérience de Cavendish . . . . .	9
2.3	Atomistique et mécanique . . . . .	10
2.4	Lance plus fort pour voir ... . . . .	11
2.5	Forme des feux d'artifice . . . . .	12
2.6	L'oscillateur harmonique perd la cadence . . . . .	12
2.7	Rotation et magnétisme : Expérience d'Einstein et Haas . . . . .	12
2.8	Mouvement d'une toupie : précession . . . . .	13
2.9	Masse gravitationnelle et masse inertielle . . . . .	14
2.10	Equilibre dans un référentiel tournant . . . . .	14
2.11	Oscillations libres et mesures de $\gamma$ pour un gaz parfait . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Physique des ondes</b>	<b>15</b>
3.1	Onde et oscillateurs . . . . .	15
3.2	Son d'une guitare, métallique ou velouté? . . . . .	15
3.3	Corde vibrante avec raideur . . . . .	16
3.4	Pression de radiation . . . . .	16
3.5	Ondes stationnaires entre deux plans . . . . .	17
3.6	Diffusion Rayleigh . . . . .	17
3.7	Effet de Peau V.S. effet Meissner . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Electromagnétisme</b>	<b>19</b>
4.1	Equilibre ionique dans un plasma . . . . .	19
4.2	Etude du dipôle électrique . . . . .	19
4.3	Interactions de Van Der Waals et loi de Coulomb . . . . .	19
4.4	Etude de condensateurs . . . . .	20
4.5	Bilan énergétique d'un condensateur . . . . .	20
4.6	Bilan énergétique d'une bobine . . . . .	20

4.7	Étude de la pression électrostatique . . . . .	21
4.8	Évolution d'un faisceau d'électrons . . . . .	21
4.9	Mouvement d'une particule chargée dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$ . . . . .	22
4.10	Principe d'un ampèremètre absolu . . . . .	22
4.11	Étude du dipôle magnétique . . . . .	23
4.12	Interaction entre courant et champ magnétique . . . . .	23
4.13	Exemple de freinage électromagnétique . . . . .	24
4.14	Étude d'un supraconducteur : effet Meissner . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Optique</b> . . . . .	<b>25</b>
5.1	Atome et lumière : une approche classique . . . . .	25
5.2	Equations de Maxwell et indice optique . . . . .	26
5.3	Lois de Snell-Descartes et Principe de Fermat . . . . .	27
5.4	Généralités sur la diffraction . . . . .	28
5.5	Notion de filtrage spatial . . . . .	28
5.6	Généralités sur les interférences . . . . .	29
5.7	Mesure d'une distance angulaire entre deux étoiles (cohérence spatiale) . . . . .	29
5.8	Interférométrie et physique atomique . . . . .	30

# 1 Thermodynamique

## 1.1 Transformations réversibles et irréversibles

1-Calculer la variation d'entropie d'un gaz entre deux états  $(P_0, T_0, V_0)$  et  $(P_1, T_1, V_1)$ . Faites les approximations que vous jugerez nécessaires. Le résultat sera exprimé en fonction des variables  $(P, T)$ .

2-On considère maintenant un gaz contenu dans une enceinte diatherme dont la partie supérieure peut coulisser sans frottement, l'ensemble étant dans un thermostat. Dans l'état initial (dont les grandeurs seront repérées par un indice 0), le gaz est en équilibre thermodynamique avec le thermostat. On augmente d'un coup la pression qui s'exerce sur le système (par exemple en posant une masse sur la partie coulissante de l'enceinte).

2-a) Quel est le nouvel état d'équilibre du gaz (dont les grandeurs seront repérées par un indice 1) ?

2-b) Calculer la variation d'entropie de l'univers de cette transformation et commenter le résultat obtenu. (On posera  $x = \frac{P_1}{P_0}$ ). Si on enlève la masse, le système retourne-t-il dans l'état 0 ?

3-On souhaite amener le système dans le même état final que précédemment mais de manière réversible. On propose d'augmenter progressivement la pression jusqu'à  $P_1$  : on passe donc par  $N$  états d'équilibre intermédiaires, chacun étant caractérisés par  $P_i = P_0 \epsilon^i$  (où  $\epsilon = x^{\frac{1}{N}}$ ,  $N$  étant le nombre total de transformations).

3-a) Calculer la variation d'entropie de l'univers associée à la transformation  $i \rightarrow i + 1$ . En faire un développement limité dans l'hypothèse il y a un grand nombre d'état d'équilibre intermédiaire en précisant l'infiniment petit.

3-b) Calculer la variation d'entropie de l'univers de la transformation totale en fonction de  $N$  et  $x$ . Commenter la limite lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Ce résultat vous fait-il penser à une définition de votre cours ?

## 1.2 Utilisation du facteur de Boltzmann

1-Rappelez ce qu'est le modèle du milieu continu en définissant 3 échelles caractéristiques de longueur. Donner quelques ordres de grandeur. Voyez-vous des situations particulières où le modèle du milieu continu tombe en défaut ?

2-Nous voulons maintenant décrire l'atmosphère terrestre en se plaçant à deux échelles différentes : le macroscopique et le microscopique. Nous nous placerons en outre dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme pour résoudre les équations.

2-a) En appliquant l'équation fondamentale de la statique des fluides, déterminer la densité de particules à la hauteur  $z$ . Discuter le résultat obtenu et donner des ordres de grandeur des dimensions caractéristiques. Pourquoi s'essouffle-t-on plus facilement en montagne ?

2-b) Retrouver ce résultat à partir de considérations microscopiques en utilisant la loi de Boltzmann. Comment comprenez-vous cette loi ?

3-Selon vous, comment la loi de Boltzmann permet-elle d'expliquer qualitativement les différents états de la matière ?

## 1.3 Théorie cinétique des gaz

Nous cherchons dans cet exercice à retrouver la loi des gaz parfaits par des considérations microscopiques.

1-Rappeler les hypothèses de la théorie cinétique des gaz parfaits et donner la définition de la température cinétique.

2-Définir et calculer la pression cinétique en faisant un modèle simple du mouvement moléculaire. Que néglige-t-on dans ce modèle simple ?

3-Retrouver la loi bien connue des gaz parfaits. Dans quel cas ce modèle est valable et dans quel cas il ne l'est plus ?

## 1.4 Théorie cinétique des gaz : effusion

La théorie cinétique des gaz permet de comprendre un bon nombre de propriétés de la matière à partir de concept exclusivement mécanique et probabiliste. Nous nous proposons de traiter un problème particulier en utilisant cette théorie.

1-On considère une enceinte cubique de volume  $V$ , thermostatée à la température  $T$ . Sur un des côté, une petite portion de l'enceinte de section  $S$  est maintenue nettement plus froide, et toute molécule qui vient frapper cette surface y reste collée. Le nombre de molécules à  $t = 0$  vaut  $N_0$ . On voudrait établir la loi de variation de la densité volumique de particules.

1-a) Pourquoi une molécule arrivant sur la portion plus froide y reste collée (on se contentera d'arguments qualitatifs) ?

1-b) On choisissant un modèle simple pour la distribution des vitesses dans le gaz, compter le nombre de particules qui se collent sur  $S$  entre  $t$  et  $t + dt$ .

1-c) En déduire la loi d'évolution de  $n(t)$ , commenter et donner un ordre de grandeur.

2- Une enceinte percée contenant un gaz va se vider au cours du temps : c'est le phénomène dit d'effusion. Montrer par un raisonnement simple que le calcul précédent permet de rendre compte du phénomène d'effusion (on fera cependant une hypothèse supplémentaire nécessaire).

3- Comment devrait-on s'y prendre pour décrire la situation de manière réaliste : qu'a-t-on négligé jusqu'à présent ?

## 1.5 Eau liquide en dessous de $0^\circ C$ , compréhensible ?

Il existe des situations où l'eau peut rester liquide en dessous de sa température de solidification (ceci arrive quand l'eau est très pure par exemple). Nous cherchons dans cet exercice à comprendre ce fait en utilisant le formalisme des potentiels thermodynamiques.

1-Nous allons d'abord revenir sur quelques généralités sur les potentiels thermodynamiques et leur signification.

1-a) Quel est le potentielle thermodynamique associée à une transformation isochore et monotherme (une démonstration est attendue) ?

1-b) Que pouvez-vous dire sur la compétition énergie/entropie ? Donner des exemples et préciser le lien avec les potentiels thermodynamiques.

2-Nous allons maintenant tenter d'expliquer le phénomène de surfusion en étudiant le début de la solidification (croissance d'un germe solide). Voici le modèle utilisé : nous considérons 1 mole d'eau dans un récipient sphérique (de rayon  $R$ ), une partie de cette eau est solide et forme une sphère de rayon  $r$  au centre du récipient. Nous négligerons la différence de masse volumique entre l'eau et la glace de sorte que l'évolution puisse être considérée comme isochore ; de plus, l'ensemble est thermostaté à  $-18^\circ C$ .

2-a) Quel est le potentiel thermodynamique adapté à cette transformation ?

2-b) Exprimer l'énergie libre  $F(r)$  du système en fonction de  $r$ ,  $R$ ,  $f_l$  et  $f_s$  (resp. énergie libre volumique de l'eau liquide et solide à  $-18^\circ C$ ).

2-c) Tracer la courbe  $F(r)$ . Explique-t-elle le phénomène de surfusion ?

2-d) Voyez-vous ce qui a été oublié dans ce modèle ? On définit une énergie libre surfacique  $\sigma$  qui tient compte de l'aspect énergétique et entropique de l'interface

*solide – liquide.* Reprendre les deux questions précédentes en tenant compte de  $\sigma$ . Commentez.

## 1.6 Diffusion thermique et création d'entropie

Nous voulons déterminer la température dans un milieu matériel en un point  $\vec{r}$  et à un instant  $t$  pour une situation particulière, puis nous voudrions établir proprement le lien entre diffusion thermique et irréversibilité.

**1-** Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous faisons quelques rappels de cours relatifs à la modélisation du problème de diffusion de la chaleur.

**1-a)** Rappeler les différents modes de transport de la chaleur et en donner des exemples. Quelle est l'interprétation microscopique de chacun d'entre eux ?

**1-b)** Donner la définition du vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}_Q(\vec{r}, t)$ . En appliquant le premier principe, faire un bilan d'énergie interne pour une transformation isochore (on définira des grandeurs massiques et on supposera qu'il existe aucun autre travail que celui des forces de pression).

**1-c)** Énoncer la loi qui relie le vecteur  $\vec{j}_Q(\vec{r}, t)$  à la distribution de température dans le milieu  $T(\vec{r}, t)$ . Cette loi est-elle une loi fondamentale de la nature ? Déterminer l'équation d'évolution de  $T(\vec{r}, t)$ . Définir les grandeurs pertinentes et leur unités. Donner un ordre de grandeur du temps nécessaire pour que l'énergie thermique ait diffusé sur une distance  $\delta$  ?

**2-** Nous nous plaçons désormais dans un cas précis : nous considérons une barre de cuivre ( $\lambda = 16 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) de longueur  $L = 1,3 \text{ m}$  et de diamètre  $D = 1,5 \text{ cm}$  dont une extrémité est plongée dans un four à  $T_f = 494 \text{ K}$  (l'autre étant dans l'atmosphère à  $T = 300 \text{ K}$ ). Nous nous intéressons au système lorsque celui-ci a atteint son régime stationnaire.

À l'aide de l'équation de la chaleur, déterminer le champ de température  $T(x)$  dans la barre (dont l'axe est parallèle à  $Ox$ ). Calculer numériquement la puissance dissipée par la barre. Qu'avons-nous négligé dans ce modèle ?

**3-D'** une manière générale, la diffusion thermique est-elle réversible ? Nous nous proposons de déterminer le taux d'entropie créée pour ce système. Comme d'habitude, nous évaluerons d'abord le taux d'entropie échangée.

**3-a)** Faire un bilan d'entropie échangée pour un élément de barre, de longueur élémentaire, en fonction de  $dt$ ,  $A$ ,  $dx$ ,  $\lambda$ ,  $T(x)$  et de sa dérivée  $\frac{dT}{dx}$  notée  $T'(x)$ . L'axe  $Ox$  est orienté du four vers l'extérieur.

**3-b)** Appliquer le second principe de la thermodynamique pour évaluer le taux d'entropie créée (nous rappelons que le système évolue en régime stationnaire). Simplifier l'expression pour un gradient de température uniforme et déduire le signe nécessaire de  $\lambda$ .

## 1.7 Autour des capacités thermiques ...

Nous allons essayer de déterminer la dépendance en température de la capacité thermique d'un gaz à volume constant. Cela nous conduira à comprendre réellement ce qu'est la capacité thermique. Nous tenterons également de voir comment cette notion a permis de mettre en évidence l'échec de la physique classique.

**1-** Nous abordons, dans une première question, quelques généralités sur les capacités thermiques.

**1-a)** Définir la capacité thermique à volume constant  $C_v$  d'un système thermodynamique.

**1-b)** Donner l'unité et la signification physique de cette grandeur. Un thermostat doit-il avoir une grande ou une petite capacité thermique et pourquoi ?

**1-c)** Citer un protocole expérimental qui permet de mesurer la capacité thermique d'un système thermodynamique.

**2-**Nous voulons maintenant calculer la fonction  $C_v(T)$  à partir de considérations microscopiques et comparer les résultats avec la réalité expérimentale (afin d'affirmer ou d'infirmer la théorie).

**2-a)** Donner la définition d'un degré de liberté pour un système mécanique. Donner des exemples. Quelle est l'énergie moyenne associée à un degré de liberté microscopique pour un système à la température  $T$  ?

**2-b)** Déterminer la capacité thermique d'un gaz parfait mono-atomique en fonction de la température. Des mesures expérimentales sur différents gaz donnent une valeur mesurée de :

- $C_v^{mes} = 12.44 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}$  pour l'argon
- $C_v^{mes} = 12.59 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}$  pour l'hélium
- $C_v^{mes} = 12.22 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}$  pour le krypton.

Pensez-vous que la théorie utilisée rende compte de la réalité expérimentale ?

**2-c)** Déterminer la capacité thermique d'un gaz parfait diatomique en fonction de la température. On tiendra compte des degrés de liberté interne à chaque molécule. Voici ce que donne les mesures :

- $C_v^{mes} = 20.6 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}$  pour  $H_2$
- $C_v^{mes} = 20.8 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}$  pour  $O_2$
- $C_v^{mes} = 20.8 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}$  pour  $HI$ .

La théorie donne-t-elle toujours des résultats satisfaisant dans ce cas ? Pensez-vous que l'on a oublié quelque chose ?

**3-**Nous voulons maintenant comprendre, à l'aide d'arguments simples, comment la théorie quantique permet de rendre compte de l'expérience.

**3-a)** Donner un ordre de grandeur de  $k_bT$  à la température ambiante et un ordre de grandeur de l'énergie électronique dans un atome (d'hydrogène par exemple). Que concluez-vous sur le rôle des degrés de libertés électroniques dans la capacité thermique ?

**3-b)** A partir de quelle température  $T_{elec}$  on doit considérer le mouvement électronique dans l'atome pour évaluer la capacité thermique ? Comment s'appelle l'état de la matière à cette température ?

**3-c)** D'après-vous, jusqu'où pouvons-nous pousser le raisonnement précédent ?

## 1.8 Le noir "absorbe" la chaleur ... pourquoi ça ?

Nous savons tous qu'une personne portant des vêtements noir aura plus chaud qu'une personne portant des vêtements blancs par beau temps. Nous voulons ici essayer d'expliquer ceci et de faire un modèle quantitatif pour un cas particulier : une voiture noir ou blanche laissée au soleil.

**1-**Avant de se pencher sur un cas particulier, nous voudrions redonner quelques généralités à propos du rayonnement du corps noir.

**1-a)** Rappeler la définition du rayonnement d'équilibre thermique et d'un corps noir. Pourquoi associe-t-on souvent le rayonnement d'équilibre et le rayonnement du corps noir ?

**1-b)** Donner la loi de Planck et la loi de Stefan Boltzmann et définissant précisément les grandeurs mentionnées.

**1-c)** *Quelques ordres de grandeur* : calculer numériquement l'ordre de grandeur de l'énergie contenue dans  $1 \text{ m}^3$  pour un gaz parfait et pour le rayonnement d'équilibre thermique. Calculer l'ordre de grandeur de la puissance émise par un être humain à 300 K ... est-ce étrange ?

**2-**Nous considérons maintenant une voiture posée au soleil dans une atmosphère à  $T_{amb} = 30^\circ\text{C}$  (mesurée à l'ombre). Les échanges thermiques entre la voiture et son environnement sont de deux types : le rayonnement et la convection. Nous modélisons l'environnement de la manière suivante :

- le rayonnement du soleil au niveau du sol est de  $700\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$  (l'énergie étant répartie essentiellement dans le spectre visible).
- l'atmosphère sera considérée comme un corps noir qui rayonne à une température  $T' = T_{amb} - 12^\circ\text{C}$  (l'énergie étant essentiellement répartie dans l'infrarouge).
- la dissipation thermique par convection suit une loi de Newton modifiée :  $P_{conv} = 2,4(T - T_{amb})^{\frac{1}{4}}$  où  $P_{conv}$  est la puissance surfacique dissipée et  $T$  est la température de la voiture.

**2-a** Faire un bilan de puissance surfacique en supposant que la voiture est un corps noir (on considérera que le transfert par rayonnement se fait uniquement par le toit et que le transfert de convection se fait sur une surface double). Peut-on alors traduire l'hypothèse d'une voiture noir ou blanche ?

**2-b** Définir ce qu'est un corps non noir et proposer une forme simple pour  $\epsilon(\lambda)$  sachant que le rayonnement du soleil est essentiellement contenu dans le visible et que celui de l'atmosphère dans l'infrarouge.

**2-c** Refaire le bilan de puissance surfacique en précisant où la couleur de la voiture intervient. Montrer qualitativement que la température d'équilibre est plus élevée pour la voiture noir.

## 1.9 Rayonnement d'équilibre thermique

Nous nous proposons d'exploiter le double aspect de la lumière pour trouver des propriétés du rayonnement d'équilibre thermique par une approche thermodynamique (c'est à dire sans admettre la loi de Planck!). Nous commençons par obtenir l'équation d'état du rayonnement.

**1-**Pour un gaz parfait de particules, nous pouvons déterminer la relation entre énergie interne et pression du gaz par des arguments mécaniques et statistiques. Nous voudrions adopter la même approche pour la lumière.

**1-a)** Comment caractérise-t-on la lumière d'un point de vue ondulatoire ? D'un point de vue corpusculaire ? Quel est le lien entre ces deux descriptions ?

**1-b)** Nous admettrons donc que le rayonnement est composé de particules de masse nulle se déplaçant à la vitesse  $c$ . Tout ce qu'il est nécessaire de savoir sur ces particules et leur description relativiste est :  $E = pc$ . Déterminer alors le lien entre la pression et l'énergie interne du gaz de photons.

**1-c)** Que trouve-t-on pour un gaz parfait monoatomique ? L'hypothèse de gaz *parfait* est-elle toujours vérifiée pour les photons ?

**2-**Nous voulons montrer, dans cette question, que cette relation entre pression et température induit nécessairement la loi de Stephan Boltzmann. On introduit pour se faire une énergie volumique tel que :  $U(T, V) = u(T)V$ , en supposant que  $u(T)$  ne dépend pas du volume.

**2-a)** Justifier, par un argument qualitatif, que l'énergie est proportionnelle au volume (et donc que  $u(T)$  ne dépende que de la température).

**2-b)** Trouver l'équation différentielle vérifiée par  $u(T)$  à partir d'une identité thermodynamique bien choisie. Intégrer cette équation, qu'en concluez-vous ?

**2-c)** Qu'apporte la loi de Planck par rapport à cette approche ?

## 1.10 Attention, ça déborde ... !

Le but de cet exercice est de répondre à la question suivante : si on place un glaçon dans un verre d'eau rempli à ras bord, l'eau déborde-t-elle lors de la fonte du glaçon ?

1-Nous voulons, dans un premier temps, rappeler quelques concepts de base de la statique des fluides.

1-a) Donner la définition de la pression dans un fluide. Quelle est l'interprétation microscopique de la pression? Existe-t-il des différences essentielles entre un liquide et un gaz à ce niveau?

1-b) Énoncer et démontrer le théorème d'Archimède. Quelle est l'origine physique de cette poussée?

2-Répondre à la question de l'énoncé.

*Question subsidiaire* : On suppose souvent que la pression au sein d'un gaz (contenu dans une enceinte de 1L par exemple) est uniforme. Quelle est l'erreur que l'on commet en réalité (on exprimera le résultat en %)? Même question pour une bouteille d'eau d'Évian.

### 1.11 Pression osmotique

On considère un récipient, formé de deux compartiments de même volume  $V$  et à la même température  $T$ , séparés par une membrane semi-perméable, perméable au solvant  $A$  mais non au soluté  $B$ . Le compartiment de gauche  $G$  contient une solution supposée idéale, de fraction molaire  $x_B$  en  $B$ , celui de droite  $D$  le solvant pur. On observe le passage spontané du solvant pur à travers la membrane.

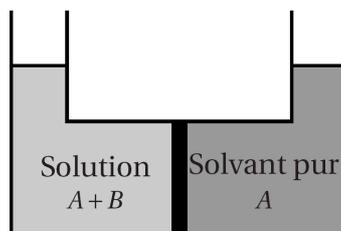


FIG. 1 – Situation d'étude de la pression osmotique

1-On note  $n_A^*$  la quantité de solvant pur,  $n_A$  la quantité de solvant en solution et  $n_B$  la quantité de soluté dans le compartiment de gauche. Exprimer la différentielle  $dG$  de l'enthalpie libre du système en fonction de  $x_B$  et des différentielles  $dn_A^*$ ,  $dn_A$  et  $dn_B$ . En déduire que le système n'est pas à l'équilibre, et que le solvant traverse la membrane dans un sens à déterminer. Ce phénomène porte le nom **d'osmose**.

2-On appelle pression osmotique  $\Pi$  la pression qu'il faut appliquer à la solution pour arrêter l'arrivée du solvant. Montrer que dans le cas d'une solution diluée ( $x_B \ll 1$ ), on a :  $\Pi v_A = RT x_B$ , où  $v_A$  est le volume molaire du solvant. Montrer que cette relation peut s'écrire  $\Pi V = n_B RT$  où  $V$  est le volume du solvant pur.

Les membranes des cellules végétales et animales sont semi-perméables : elles laissent passer l'eau, mais pas les ions en solution. Expliquer pourquoi on se déshydrate si l'on boit de l'eau de mer ( $C(NaCl) = 35g/L$ ), pourquoi on fait dégorger des cornichons en les plaçant dans une solution d'eau salée, Pourquoi les salaisons permettent d'éviter la prolifération bactérienne et ainsi d'assurer la conservation des aliments?

### 1.12 Thermodynamique et réaction chimique

Nous voulons, ici, faire le lien entre la thermodynamique vue en cours de physique et la thermochimie. Nous allons donc redémontrer la loi d'action de masse qui découle des deux principes de la thermodynamique.

1-(Re-)démontrer que la fonction enthalpie libre  $G(T, p)$  est le potentiel thermodynamique pour une transformation isobare et isotherme pour un système physique.

2-Définir le potentiel chimique à partir de l'enthalpie libre du système. Écrire le potentiel chimique pour un gaz parfait pur et pour un mélange de gaz parfait. Définir la notion de solution idéale et donner une forme générale du potentiel chimique dans ce cas (on précisera

les approximations faites lors du passage du gaz parfait à la solution "parfaite"). Ecrire le potentiel chimique dans le cas des solutions réelles (on introduira l'activité chimique).

**3-**Déduire la loi d'action de masse pour un système contenant plusieurs espèces chimiques à partir de la condition d'équilibre du système. Définir la constante de réaction, l'affinité chimique et le quotient de réaction.

## 2 Mécanique

### 2.1 Le problème à deux corps et applications

**1-**Connaissant le champ de force dans lequel est plongé un système mécanique ponctuelle (comme une particule), on peut parfaitement déterminer les lois du mouvement. La question qui est traitée ici est de savoir ce qu'il en est pour *deux* corps en interaction plongés dans un champ de force extérieur.

**1-a)** Écrire le principe fondamental de la dynamique pour chaque corps et introduire un nouveau jeu de variables décrivant complètement le système. Que donnerait une généralisation à trois corps ?

**1-b)** Démontrer que l'énergie cinétique s'exprime comme une somme de deux termes dont l'interprétation est particulièrement claire. Existe-t-il un théorème qui généralise cette expression pour un nombre  $N$  de corps interaction ?

**1-c)** Mêmes questions pour le moment cinétique du système.

**2-**On se restreint maintenant au cas particulier d'une interaction de type force centrale. Nous verrons comment les lois de conservations imposent des contraintes importantes au système et de simplifier alors l'étude du mouvement.

**2-a)** Qu'appelle-t-on force centrale? Pourquoi s'intéresse-t-on tant à ce type de force? Donner des exemples de forces centrales.

**2-b)** Démontrer que le moment cinétique et l'énergie totale du mobile fictif sont des constantes du mouvement. Quelles sont les conséquences de ces observations (plusieurs discussions sont attendues) ?

**3-**Nous voulons, pour finir l'exercice, appliquer ces concepts à des situations physiques concrètes afin de comprendre certains faits naturels.

**3-a)** Donner la définition et l'expression de la vitesse de libération pour un astre de masse  $M$ .

**3-a)** Expliquez pourquoi la terre possède une atmosphère.

**3-c)** Quelle est la masse d'un astre à partir de laquelle l'astre ne laisse plus s'échapper la lumière (trou noir) ?

### 2.2 Mesure de $G$ par l'expérience de Cavendish

La loi de Newton prédit une attraction gravitationnelle universelle entre deux corps dont l'intensité est déterminée par les masses de chaque corps, leur distance et une constante de la nature  $G$ . Nous voulons décrire comment la mesure *directe* de cette constante a été effectuée par Cavendish (1731-1810).

**1-**Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous commençons par une question préliminaire qui donne un argument simple en faveur de la loi de Newton (cet argument est due à Newton lui-même).

Sachant que la lune tourne autour de la terre avec une période 27,3 jours et à une distance de  $60R_T$  (où  $R_T$  est le rayon terrestre), montrer qu'une loi en  $\frac{1}{r^2}$  est conforme à l'expérience. On suppose connu le champ de gravitation  $g_T$  à la surface de la terre.

**2-** Nous avons vu qu'une loi en  $\frac{1}{r^2}$  est un bon candidat pour expliquer la gravitation. Nous voulons maintenant mesurer la constante universelle qui va fixer l'intensité caractéristique de cette force.

**2-a)** Le schéma de l'expérience est montré en figure 2. Expliquer qualitativement en quoi consiste l'expérience simplement à partir du schéma (on indique que l'on mesure, au final, une déviation de faisceau).

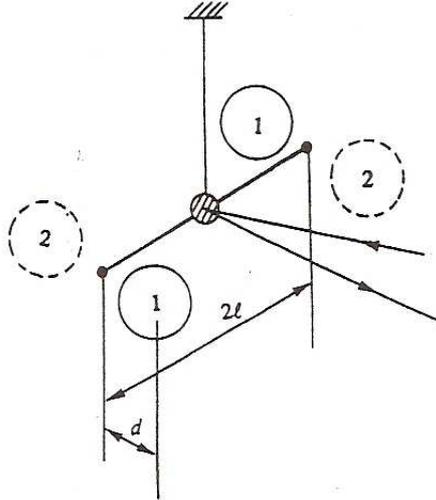


FIG. 2 – Protocole expérimental de Cavendish

**2-b)** On suppose connu la constante de torsion  $C$  du fil. Exprimer la constante  $G$  en fonction de la déviation mesurée du faisceau, notée  $\alpha$ .

**2-c)** On donne  $C = 5.10^{-7}$  SI,  $2l = 20$  cm,  $m = 50$  g,  $M = 30$  kg et  $d = 15$  cm (distance entre les centres en l'absence de déviation). On mesure une déviation du spot lumineux de  $a = 3,5$  cm sur un écran situé à  $b = 5$  m du montage. Calculer numériquement la valeur mesurée de  $G$  par Cavendish. Conclure.

### 2.3 Atomistique et mécanique

Il est tout à fait naturel de décrire les atomes ou le système  $\{terre - lune\}$  par la mécanique Newtonienne. Cependant, des expériences d'optiques montrent que la mécanique Newtonienne ne rend absolument pas compte de la structure atomique. C'est ce qui a engendré l'élaboration de la mécanique quantique mais, du fait de la complexité du problème, même la théorie quantique doit être approchée. Cette démarche conduit à des modèles empiriques qui permettent de comprendre la structure des atomes.

**1-** Nous voulons retracer la genèse de ce modèle empirique à partir d'un raisonnement physique; on le fera sur l'atome d'hydrogène. Nous nous placerons dans le cadre du modèle de Bohr : le moment cinétique du système  $\{electron - proton\}$  ne peut être qu'un multiple de  $\hbar$ .

**1-a)** Appliquer le principe fondamental de la dynamique au système étudié. En déduire l'expression de l'énergie totale et du rayon de l'orbite en fonction du moment cinétique.

**1-b)** En déduire l'énergie de chaque orbite et les longueurs d'onde de l'ensemble des raies observables (on introduira une énergie typique). On pourra aussi exprimer le rayon de chaque niveau d'énergie en fonction du rayon de Bohr que l'on définira.

**1-c)** Les résultats obtenus sont en accord avec l'expérience mais ne sont pas généralisables aux atomes polyélectroniques, pourquoi ?

Rappelez la description quantique d'un tel système en terme d'orbitales atomiques (on rappellera les approximations faites pour le passage monoélectronique  $\rightarrow$  polyélectronique).

**2-**Nous voulons maintenant étudier les caractéristiques d'un élément particulier, le brome *Br* (numéro atomique 38), grâce à un de ces modèles empiriques, le modèle de Slater.

**2-a)** Donner la configuration électronique de l'état fondamental du *Br*. Combien a-t-il d'électrons de valence ? D'électrons de coeur ?

**2-b)** Dans le cadre du modèle Slater, l'énergie d'un électron dans l'état  $(n, l, m)$  est donnée par  $E(n, l, m) = -13.6(\frac{Z-\sigma}{n^*})^2$ , où  $n^*$  est une valeur phénoménologique du nombre quantique principal  $n$ . Quelle est l'interprétation de la constante  $\sigma$  ?

**2-c)** Définissez l'énergie de première ionisation de l'atome de *Br*. La calculer en utilisant le modèle de Slater. Les règles de Slater utilisées sont données en figure 3.

électron j/électron i	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p
1s	0.31							
2s 2p	0.85	0.35						
3s 3p	1	0.85	0.35					
3d	1	1	1	0.35				
4s 4p	1	1	0.85	0.85	0.35			

FIG. 3 – Règles de Slater. L'électron "test" est en colonne et les électrons qui écrantent sont en ligne.

## 2.4 Lance plus fort pour voir ...

Dans cet exercice, nous voulons savoir si une balle de tennis lancée dans l'air peut parcourir une distance aussi grande que l'on veut. Nous allons, pour se faire, utiliser les lois de la mécanique qui permettent de *prévoir* le mouvement d'un système connaissant les forces qui s'y exercent.

**1-**Nous supposons, dans une première question, que les frottements de l'air sont négligeables. La balle est lancée à une hauteur  $z_0$  du sol avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.

**1-a)** Faire un schéma qui contient le repère utilisé, les conditions initiales et les forces qui s'exercent sur la balle.

**1-b)** Résoudre les équations du mouvement et déterminer la trajectoire de la balle. Peut-on lancer la balle aussi loin que l'on veut dans les différents cas suivants :

(i)  $z_0 = 0$ ,  $\|\vec{v}_0\|$  est constante mais  $\alpha$  peut varier. Pour quelle valeur  $\alpha_0$  de  $\alpha$  la distance parcourue est maximale ?

(ii)  $\vec{v}_0$  est fixée et  $z_0$  peut varier (on prend  $\alpha = \alpha_0$ ). Quelle est la distance maximale atteinte ?

Faire des applications numériques pour  $\|\vec{v}_0\| = 172 \text{ km.h}^{-1}$  (vitesse moyenne de balle pour un service de Nadal).

**1-c)** La trajectoire de la balle de tennis est-elle différente de celle d'une voiture qu'on lancerait avec les mêmes conditions initiales ? Comment s'appelle cette propriété ? Donnez-en une autre manifestation.

2- On sait bien que l'air induit des frottements de type visqueux qu'il faut prendre en compte si nous voulons prévoir le mouvement de la balle. C'est le but de cette deuxième question.

**2-a)** Quelle est l'origine microscopique de ce frottement fluide? Quel est son expression?

**2-b)** Déterminer la position  $\vec{r}(t)$  et la vitesse  $\vec{v}(t)$  de la balle en fonction des conditions initiales et des forces mises en jeu.

**2-c)** Discuter le mouvement au bout d'un temps infini en fonction de  $z_0$  et répondre à la question posée au départ. On s'aidera d'une esquisse de la trajectoire de la balle. Pour les applications numériques, on prendra  $\vec{f}_{visq} = -\vec{v}$ .

## 2.5 Forme des feux d'artifice

Dans cet exercice, nous nous intéressons à la forme des feux d'artifice. Nous considérons  $N$  points matériels lancés dans le plan ( $xOy$ ) avec une même vitesse  $\|\vec{v}_i\| = v_0$ . En outre, la direction des  $\vec{v}_i$  est répartie aléatoirement sur  $[0; 2\pi]$ . On supposera que chaque point matériel est soumis à son poids et à une force de frottement. Comment évolue l'ensemble du système? (On pourra commencer par déterminer  $\vec{r}_i(t)$ ).

## 2.6 L'oscillateur harmonique perd la cadence

Nous nous proposons d'étudier un pendule simple au delà de l'approximation des petits angles. Nous verrons un certain nombre de phénomènes caractéristiques de la *physique non linéaire* apparaître<sup>1</sup>.

**1-**Dans une première question, on approche le problème d'un point de vue qualitatif tout en faisant le lien avec l'approximation des petits angles.

**1-a)** Ecrire l'énergie totale d'un pendule simple de manière exacte et tracer l'énergie potentielle du système en fonction de  $\theta$ .

**1-b)** Discuter la nature du mouvement selon les conditions initiales en distinguant 3 cas. Que retrouve-t-on dans l'approximation des petites amplitudes?

**2-**Nous voulons maintenant déterminer quantitativement le changement de comportement de l'oscillateur dans son régime non linéaire.

**2-a)** Ecrire une équation du mouvement à l'ordre le plus bas (mais  $\geq 1$ ) en  $\theta$ . Quelle va-t-elle être l'influence de ce terme sur la dynamique du système (on pourra considérer une solution sinusoïdale)?

**2-b)** Nous allons considérer que l'effet du nouveau terme est faible (c'est d'ailleurs pourquoi le développement de Taylor fonctionne) et chercher une solution du type :  $\theta(t) = \theta_0(\sin(\omega t) + \epsilon \sin(3\omega t))$  où  $\theta, \epsilon \ll 1$ . Trouver l'expression de  $\omega$  en fonction de  $\omega_0$  et  $\theta_0$ . Commentez.

## 2.7 Rotation et magnétisme : Expérience d'Einstein et Haas

Une expérience simple suggère que les matériaux magnétiques (les aimants) soient constitués de particules elles-mêmes "aimantées". Si l'on casse un aimant en deux, le champ magnétique que produit chacun des morceaux à la même structure qu'avant. On pourrait imaginer le casser jusqu'à avoir des atomes et on aurait toujours la même structure de champ dipolaire. On est donc amené à penser que les atomes eux mêmes sont des petits aimants.

**Rappels :** Le dipôle magnétique  $\vec{m}$  créé par une boucle de courant est  $I\vec{S}$ , où  $I$  est le courant qui parcourt la boucle et  $\vec{S}$  le vecteur surface de la boucle. Un dipôle magnétique plongé dans un champ magnétique subit une force et un couple qui sont respectivement :  $\vec{f} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$  et  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ .

<sup>1</sup>Pour cet exercice, on rappelle la formule :  $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$

1-Expliquer comment un atome peut-il posséder un dipôle magnétique (on prendra le modèle de Bohr pour décrire l'atome). Exprimer la vecteur dipôle magnétique  $\vec{m}$  en fonction d'une grandeur caractérisant la rotation de l'électron.

2-Ce lien entre rotation et magnétisme n'est qu'une pure hypothèse vus les raisonnements et les modèles utilisés jusqu'à présent. Une preuve expérimentale de cette équivalence magnétisme-rotation a été apportée par Einstein et Haas (voir figure 12). Calculer la vitesse de rotation du cylindre lorsque le champ magnétique est nul. AN :  $\rho = 10^{-4}$  SI,  $R = 1$  mm,  $M_0 = 10^6$  SI.

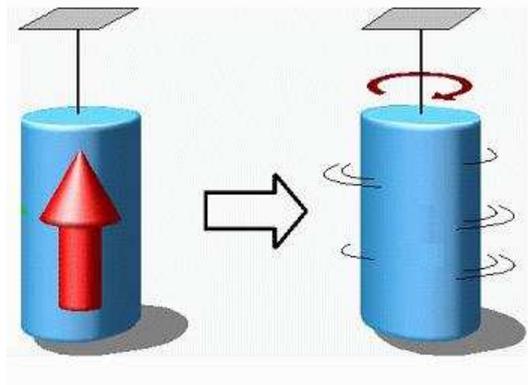


FIG. 4 – Quand le champ est non nul, tous les dipôles sont alignés (suivant le champ) et il y a un dipôle résultant non nul. Lorsque le champs est nul, les dipôles microscopiques ont la même valeur **mais** leur orientation est aléatoire (agitation thermique) donc il y a aucun dipôle résultant.

3-A l'aide de ce lien entre magnétisme et rotation, déterminer l'évolution d'un dipôle magnétique dans un champ magnétique constant. Connaissez-vous un système purement mécanique qui possède le même genre de mouvement ?

## 2.8 Mouvement d'une toupie : précession

Dans cet exercice, on se penche sur le mouvement d'un solide de révolution (dont la toupie fait partie). On explicitera en particulier l'**approximation gyroscopique** qui est relativement courante et importante pour l'étude de ce genre de mouvement.

1-Définir les angles d'Euler  $(\phi, \theta, \psi)$  d'un solide en introduisant 3 bases de l'espace différentes. On pourra s'aider utilement d'un schéma. Ecrire alors le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(S/R_{lab})$  du solide par rapport au référentiel<sup>2</sup> du laboratoire.

2-Ecrire le moment cinétique du solide  $\vec{\sigma}_0(S/R_{lab})$  dans une base judicieusement choisi qui permet d'exploiter la révolution du solide (on introduira la matrice d'inertie du solide). L'approximation gyroscopique consiste à dire que le moment cinétique du solide est dirigé exclusivement suivant son axe de rotation propre. Donner un critère quantitatif qui permet de savoir si cette approximation est valide.

3-On se place désormais dans cette approximation pour traiter le mouvement d'une toupie en rotation. Nous voulons notamment rendre compte de sa stabilité (vis-à-vis de la gravité) quand elle tourne sur elle-même.

**3-a)** Vérifier, par des ordres de grandeur, que l'approximation gyroscopique est effectivement vérifiée pour un tel système.

**3-b)** En appliquant les lois de la dynamique, trouver une l'équation qui régit l'évolution de  $\vec{\sigma}_0^{gyro}(S/R_{lab})$  (que l'on notera  $\vec{\sigma}_0$  dans la suite).

**3-c)** Résoudre cette équation et retrouver le mouvement de la toupie. Commenter la situation en fonction des valeurs des différents paramètres pertinents.

<sup>2</sup>Différence entre une base de l'espace, un repère et un référentiel ?

## 2.9 Masse gravitationnelle et masse inertielle

Il existe 4 interactions fondamentales qui expliquent environ tout ce que l'on peut observer. L'une de ces 4 interaction, la gravitation, a un statut un peu particulier : le but de cet exercice est de comprendre pourquoi la gravitation est différente<sup>3</sup>. Pour ce faire, nous allons nous pencher sur la mécanique dans le référentiel terrestre.

**1-**Donner (si vous la connaissez) la définition de la masse inertielle (notée  $m_i$ ) et de la masse gravitationnelle ou "charge gravitationnelle" (notée  $m_g$ ). Existe-t-il une raison pour que ces masses soient égales ?

**2-**Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre en notant différemment les deux types de masse. Donner un nom à chacun des termes de cette équation. Quelle force est responsable de quel phénomène ?

**3-**On s'intéresse maintenant au poids d'un corps de masse inertielle  $m_i$  et de masse gravitationnelle  $m_g$ . Définir le poids d'un corps et donnez son expression en fonction de la latitude (On pourra définir un référentiel pratique pour travailler). Montrer que la direction du poids fait un angle  $\alpha$  avec la direction de  $\vec{g}$  et que cet angle dépend du rapport  $r \equiv \frac{m_i}{m_g}$ .

Des expériences montrent (par la mesure de  $\alpha$ ) que ce rapport ne dépend pas du corps considéré : c'est le même pour tout le monde. Ceci signifie qu'on peut se ramener à  $m_i = m_g \equiv m$  par un choix convenable d'unité (sur la constante  $G$ ). Que montre cette expérience quant à la nature des forces gravitationnelles comparé à celle des forces d'inertie ?

## 2.10 Equilibre dans un référentiel tournant

Nous allons étudier l'équilibre d'une petite bille dans un référentiel tournant. Le principe de l'expérience est montré en figure 5.

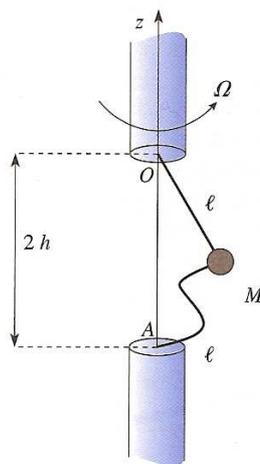


FIG. 5 – Schéma et notations du problème

**1-**Dans cette question, on supposera que la bille n'est tenue que par le fil du haut. Calculer l'énergie potentiel du système (c'est à dire la bille) dans le référentiel tournant et trouver les positions d'équilibre en fonction de  $\Omega = \|\vec{\Omega}\|$  et discuter leur stabilité.

**2-**Quelle sera l'action du fil de dessous sur les positions d'équilibre ?

**3-**On suppose que les fils peuvent subir une tension maximale de 50 N, au delà le fil casse. Calculer la vitesse de rotation nécessaire pour casser un des deux fils. Lequel cassera en premier et pourquoi? AN :  $l = 40$  cm,  $h = 30$  cm et  $m = 1$  kg.

<sup>3</sup>Cette différence pose de gros problèmes théoriques qui sont loin d'être résolus à ce jour. Ce sont les problèmes d'unifications qui ont donné naissance à la théorie des cordes ...

## 2.11 Oscillations libres et mesures de $\gamma$ pour un gaz parfait

Un récipient adiabatique de volume  $V_0$  contenant un gaz parfait est bouché par une bille de masse  $m$  qui peut glisser sans frottement dans le goulot de section  $S$ . La transformation que subit le gaz sera supposée réversible. Les grandeurs à l'équilibre seront indicées par 0, comme  $V_0$ ,  $P_0$ ,  $z_0$ , ect ...

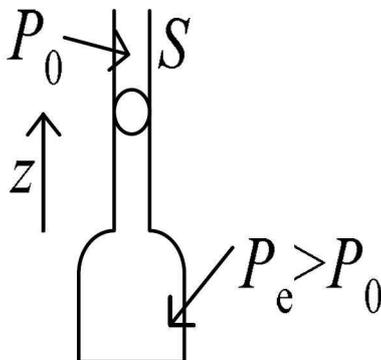


FIG. 6 – Expérience de Ruchardt

Déterminer le mouvement de la bille (en le supposant de faible amplitude) et donner des ordres de grandeur des paramètres importants du mouvement pour un gaz monoatomique et pour un gaz diatomique. La nature chimique du gaz change-t-elle quelque chose ?

## 3 Physique des ondes

### 3.1 Onde et oscillateurs

Nous voulons montrer dans cet exercice qu'une onde n'est rien d'autre que le mouvement d'un ensemble d'oscillateurs couplés.

Considérons un ensemble de  $N$  masses  $m$  disposées sur une chaîne. Une masse  $i$  est couplée à ses plus proches voisines (soit  $i + 1$  et  $i - 1$ ) par un couplage de type force de rappel de constante de raideur  $k$ . On note  $x_i$  l'écart de la masse  $i$  à sa position d'équilibre dont l'abscisse est  $i \cdot a$ .

**1-**Faire un schéma qui résume les notations données dans l'énoncé.

**2-**Ecrire l'équation du mouvement pour une masse  $i$  en fonction des coordonnées des autres masses.

**3-**On souhaite résoudre les équations du mouvement pour les conditions aux limites suivantes :  $x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0$ . A quelle condition sur  $k$  une solution de la forme  $x_i(t) = A \exp(j(\omega t - ika)) + B \exp(j(\omega t + ika))$  convient-elle pour ces conditions aux limites ?

**4-**Déterminer  $x_i(t)$  pour chaque situation où la condition trouvée précédemment est vérifiée. Faire un schéma et les commentaires qui s'imposent.

**5-**Trouver une relation entre  $k$  et  $\omega$  en utilisant l'équation du mouvement (on considérait pour l'occasion une solution du type  $x_i(t) = X_0 \exp(j(\omega t - ika))^4$ ). Comment s'appelle cette relation ?

### 3.2 Son d'une guitare, métallique ou velouté ?

**1-**Déterminer l'équation qui donne l'évolution d'une corde dont on autorise des mouvements de faible amplitude et unidirectionnel. On appellera  $\Psi(x, t)$  la hauteur de la corde en  $x$  à l'instant  $t$ .

<sup>4</sup>Ceci revient juste à autoriser des valeurs négatives pour  $k$  : on ne perd pas en généralité.

**2-**On bloque une extrémité de la corde de longueur  $L$  et l'autre extrémité oscille à la fréquence  $\omega$  avec une amplitude  $a$  (par un moyen expérimental quelconque). Déterminer complètement le champ  $\Psi(x, t)$  en fonction de  $\omega$  pour une solution du type  $\Psi(x, t) = A \cos(\omega t) \cos(kx + \phi_s)$ . Comment s'appelle ce type de solution et pourquoi? Commenter le résultat obtenu.

**3-**En vous appuyant sur l'allure des spectres de Fourier d'une fonction triangle et d'une parabole<sup>5</sup>, essayer de comprendre pourquoi le son d'une corde de guitare est plus métallique lorsqu'elle est jouée au médiator que lorsqu'elle est jouée au doigt.

### 3.3 Corde vibrante avec raideur

Nous voulons étudier semi-qualitativement l'influence de la raideur d'une corde sur sa dynamique. Pour cela, nous considérons les mouvements stationnaires d'une corde de longueur  $L$  fixée à ses deux extrémités : la hauteur de la corde au point  $x$  et à l'instant  $t$  dans un mode propre  $n$  s'écrit  $\Psi_n(x, t) = A \cos(\omega_n t) \sin(\frac{n\pi x}{L})$ .

**1-**Donner l'expression de  $\omega_n^0$  dans le cas où on néglige la raideur de la corde (distingué de l'autre cas par l'exposant <sup>0</sup>) en justifiant la réponse.

**2-**Tenir compte d'une raideur revient à considérer une nouvelle force dirigée suivant la direction de vibration de la corde (notée  $Oy$ ) qui s'oppose à des courbures trop importantes. On va prendre la loi phénoménologique suivante :  $dR = -\gamma \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3} dx$  est la force qu'exerce la partie droite de la corde sur la partie gauche,  $\gamma$  étant un coefficient caractéristique du matériaux de la corde.

**2-a)** Commenter la forme de cette loi sur un schéma et décrire qualitativement son effet.

**2-b)** Faire un bilan des forces sur un élément de corde de longueur  $dx$  et obtenir l'équation d'évolution spatio-temporelle de  $\Psi(x, t)$ . Est-ce une équation de D'Alembert ?

**2-c)** Trouver les nouvelles pulsations propres  $\omega_n$  en présence de la raideur. Commenter l'influence de la raideur sur la pulsation des modes propres en fonction de  $n$ . *A.N.* :  $T_0 = 387 \text{ N}$ ,  $L = 0.5 \text{ m}$ ,  $\gamma = 10^{-2} \text{ N.m}^2$ .

### 3.4 Pression de radiation

Le champ électromagnétique transporte une énergie et une quantité de mouvement. Nous voulons montrer dans cet exercice qu'il y a certaines conséquences directes et observables de cette propriété un peu surprenante. Nous allons d'abord traiter un cas d'école pour pouvoir résoudre les équations.

On considère un milieu parfaitement conducteur occupant l'espace  $x > 0$  sur lequel arrive, en incidence normale, une onde électromagnétique polarisée rectilignement. Nous voulons calculer la force qu'exerce l'onde sur ce milieu conducteur.

**1-**Faire un schéma et poser les notations. Qualitativement, que va-t-il se passer lorsque l'onde arrivera sur le métal ?

**2-**En considérant les conditions aux limites des champs et en se plaçant dans un modèle surfacique, calculer les densités surfaciques de charge et de courant  $(\sigma, \mathbf{j}_s)$ . Voyez-vous d'autre grandeur pertinente à calculer ?

**3-**En utilisant la force de Lorentz, calculer la force  $d\mathbf{F}$  qu'exerce l'onde sur une surface  $dS$  du miroir. En déduire une expression de la pression de radiation  $P_{rad}$  définie par :

$$\langle d\mathbf{F} \rangle_T = -P_{rad} \cdot d\mathbf{S}$$

On exprimera le résultat en fonction de  $\langle u_{em} \rangle_T$ , énergie électromagnétique volumique moyennée sur le temps.

<sup>5</sup>Tout ce qu'il est nécessaire de savoir est que le spectre d'un triangle décroît comme  $1/n^2$  et que celle d'une parabole décroît comme  $1/n^3$ ,  $n$  étant l'ordre de l'harmonique.

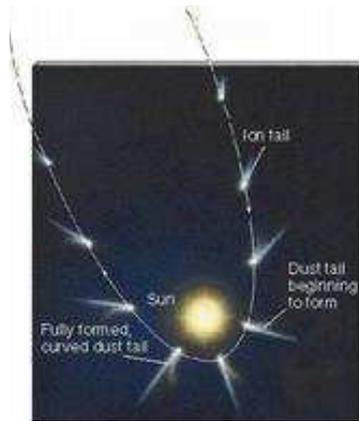


FIG. 7 – On pourrait penser que le queue d'une comète est dirigée vers le soleil par attraction ... ce n'est pourtant pas le cas, pourquoi ?

### 3.5 Ondes stationnaires entre deux plans

Comme toute grandeur susceptible de se propager, des modes stationnaires peuvent être observés. Nous nous proposons de décrire ses modes pour une vibration électromagnétique et de faire, éventuellement, une analogie avec d'autres phénomènes ondulatoires rencontrés.

On considère deux plaques infinies parfaitement conductrices, occupant les espace  $x < 0$  et l'autre  $x > a$ .

**1-**Quels sont les conditions aux limites vérifiées par le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$  ?

**2-**On considère un champ de la forme  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = f(x) \cos(\omega t) \mathbf{u}_y$

**2-a)** Quelles sont les conditions sur  $\omega$  pour que ce champ soit solution des équations de Maxwell avec les bonnes conditions aux limites ?

**2-b)** Commenter le résultat en appuyant votre propos sur des représentations graphiques. Pouvez-vous faire un parallèle avec un autre système physique ?

**2-c)** Pourquoi cette forme de champ est-elle appelée "stationnaire" ? La dépendance en temps est pourtant manifeste ...

**3-**Calculer le champ magnétique qui accompagne nécessairement ce champ électrique.

**4-**Calculer l'énergie magnétique et l'énergie électrique contenue entre les deux plans à chaque instant. Faire un graphe de ces quantités en fonction du temps, que constatez-vous ? Connaissez-vous un circuit électrique qui possède cette propriété ?

### 3.6 Diffusion Rayleigh

Nous voulons, dans cet exercice, faire le lien entre l'absorption de lumière par une substance (loi de Beer-Lambert, utilisée en spectroscopie) et les équations de Maxwell. Comme tout ce qui touche à la lumière, ce lien passe par l'étude du dipôle oscillant faite en cours.

On considère un gaz dilué de densité atomique  $n$  éclairé par une onde plane monochromatique de fréquence  $\omega$ . La pulsation de résonance atomique  $\omega_0$  est très grande devant celle du champ incident. On donne la formule de Larmor démontrée en cours : la puissance rayonnée  $P$  par une charge non relativiste d'accélération  $\mathbf{a}$  est donnée par

$$P = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{a}^2}{3c^3}$$

**1-**En déterminant l'accélération d'un électron élastiquement lié, exprimer la puissance rayonnée en fonction de  $\omega_0$ ,  $\omega$  et  $\mathbf{E}_0$ . On pensera à utiliser l'hypothèse  $\omega_0 \gg \omega$ .

2-L'onde interagit avec les atomes contenus dans un cylindre de section  $S$  perpendiculaire à l'incidence de l'onde. En faisant un bilan d'énergie sur une tranche  $dx$  et en notant  $\phi(x)$  le flux d'énergie entrant en  $x$ , déterminer une équation différentielle sur  $\phi$ .

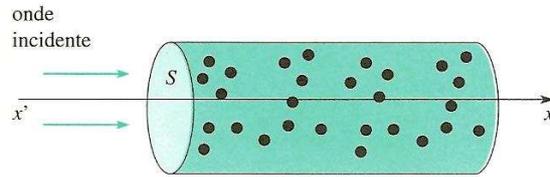


FIG. 8 – Schéma et notations du problème

3-Résoudre cette équation et discuter physiquement la solution. Introduire une longueur caractéristique  $\delta(\omega)$  dont on décrira la variation avec  $\omega$ . *A.N.* : la constante d'Avogadro  $6.10^{23} \text{mol}^{-1}$ ,  $q=1,6.10^{-19} \text{C}$ ,  $m=9,1.10^{-31} \text{kg}$ .

4-Connaissez-vous une manifestation classique de cet effet que l'on peut observer tous les soirs ... ?

### 3.7 Effet de Peau V.S. effet Meissner

Nous voulons essayer de comprendre pourquoi l'effet de peau n'existe que pour des champs variables, autrement dit : qu'avec des ondes. Pour atteindre cet objectif, nous nous intéresserons à l'effet Meissner, apparemment complètement découplé du problème.

1-On considère une onde électromagnétique plane, monochromatique et polarisée rectilignement qui arrive sur un milieu de conductivité statique  $\sigma_0$  à incidence normale. On s'intéresse à la distribution du champ  $(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$  dans le conducteur.

1-a) En utilisant le modèle de Drüde, déterminer la conductivité du métal  $\sigma(\omega)$  en régime harmonique. Retrouve-t-on le cas  $\omega = 0$ ? Commentez physiquement la forme obtenue en faisant un graphique.

1-b) Ecrire l'équation vérifiée par le champ électrique et magnétique dans le conducteur. En déduire la relation de dispersion des ondes (On posera  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$ , appelée pulsation plasma).

1-c) Pour les deux cas limites  $\omega_p \gg \omega \gg 1/\tau$  et  $\omega \ll 1/\tau$ , donner des expressions approchées de la relation de dispersion obtenue précédemment.

1-d) En déduire l'expression du champ magnétique dans le conducteur pour chaque cas limite. Discuter physiquement les solutions obtenues en faisant des graphiques. Dans quel cas obtient-on l'effet de peau? Quel phénomène fait apparaître l'autre cas limite?

2-On voudrait maintenant faire le lien avec l'effet Meissner, à savoir : les lignes de champ magnétique ne pénètrent pas dans un supraconducteur même en régime stationnaire. Nous admettrons qu'un porteur d'une phase supraconductrice ne subit aucune collision.

2-a) Ecrire l'équivalent de la loi d'Ohm locale pour un matériaux supraconducteur. Commenter physiquement le courant engendré par un champ électrique constant.

2-b) Par des considérations d'induction, montrer qualitativement qu'un champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  ne peut pas pénétrer le supra. (On pourra considérer une phase transitoire où le champ magnétique croît jusqu'à  $\mathbf{B}_0$ ). On conseille de tracer des courbes.

2-c) Faire le même raisonnement avec un conducteur classique. Expliquer alors pourquoi l'effet de peau ne peut exister qu'en régime sinusoïdale.

## 4 Electromagnétisme

### 4.1 Equilibre ionique dans un plasma

On veut comprendre comment se comporte un plasma lorsqu'on y plonge une espèce chargée (un ion). On sera amené à utiliser les lois de l'électromagnétisme et de la thermodynamique pour atteindre notre but.

Un plasma est une "soupe" d'électrons et de noyaux (ici, des protons) en équilibre thermodynamique. On appellera  $n_-(\vec{r})$  la densité d'électrons et  $n_+(\vec{r})$  la densité de protons. En l'absence d'ion, ces densités sont uniformes (notées d'un  $^0$ ) et par neutralité :  $n_-^0 = n_+^0$ . On place un ion (supposé sphérique) de charge  $+q$  dans ce milieu et on cherche à comprendre la réponse du milieu à cette modification.

**1-**Comment, d'après vous, la distribution de charge sera modifiée par la présence de l'ion (une réponse qualitative est attendue) ?

**2-**La présence de cette charge va engendrer un potentiel électrostatique  $V(r)$  qui va affecter  $n_-$  et  $n_+$ . Mais les nouvelles distributions de  $n_-$  et  $n_+$  vont, à leur tour, modifier  $V$  ... C'est un problème où tout est intriqué ! La thermodynamique nous apprend que :

$$n_+(r) = n_+^0 \exp\left(-\frac{eV(r)}{kT}\right)$$
$$n_-(r) = n_-^0 \exp\left(+\frac{eV(r)}{kT}\right)$$

**2-a)** Commenter les formes des densités de particules chargées.

**2-b)** Utiliser les lois de l'électrostatique pour obtenir une équation sur le potentiel  $V(r)$ .

**2-c)** En linéarisant l'équation, trouver la forme du potentiel  $V(r)$  (et donc de  $n_+(r)$  et  $n_-(r)$ ). On introduira une longueur caractéristique du problème  $\lambda_D$  (appelée longueur de Debye).

**2-d)** Discuter la physique du potentiel de Yukawa (analogie et différence avec le potentiel coulombien, lien avec la permittivité relative d'un milieu, la solubilité des espèces ioniques, etc ...) et justifier les approximations faites à la question précédente par un calcul numérique.

### 4.2 Etude du dipôle électrique

Nous voulons, dans un premier temps, re-démontrer tous les résultats de cours concernant le dipôle électrique en repartant de la loi de Coulomb. Ensuite, nous étudierons une façon de créer un dipôle à partir de l'édifice atomique (phénomène de polarisabilité, crucial pour comprendre la structure de la matière à l'échelle atomique).

**1-** Considérons deux charges  $-e$  et  $+e$  situées respectivement aux points  $(-\frac{a}{2}, 0)$  et  $(+\frac{a}{2}, 0)$  du plan. Calculer le potentiel  $V(x, y)$  puis le champ électrique  $\vec{E}(x, y)$  créé par cette distribution de charge. On précisera les approximations faites.

**2-** Sans calculs, expliciter les actions mécaniques d'un champ électrique extérieur  $\vec{E}_{ext}(\vec{r})$  sur un tel dipôle. Justifier physiquement les équations écrites.

**3-** La matière est électriquement neutre donc il est légitime de s'interroger sur la pertinence du concept de dipôle dans la description de la matière ... ! Expliquer sur des exemples pourquoi la notion de dipôle est pertinente (penser à la chimie, à la structure des atomes et molécules, au phénomène de solvatation, à l'indice optique, etc ...)

### 4.3 Interactions de Van Der Waals et loi de Coulomb

Le nom de Van Der Waals est généralement associé à une équation d'état d'une espèce gazeuse. Nous allons donner un aperçu du lien qu'il existe entre cette équation d'état et la loi de Coulomb. Nous partons d'un modèle atomique simple pour comprendre le lien entre la

notion de dipôle et les interaction de Van Der Waals (plus particulièrement, ici, l'interaction dipôle induit/dipôle permanent).

**1-**Considérons un modèle de l'atome d'hydrogène où le proton est au centre d'un "nuage" électronique uniforme et sphérique et voyons par quel mécanisme un dipôle peut-être induit.

**1-a)** Justifier l'existence d'une force de rappel exercée par le nuage électronique sur le noyau. Cette force de rappel s'écrit sous la forme :  $\vec{f} = -k(\vec{r}_- - \vec{r}_+)$  où  $\vec{r}_+$  est la position du proton et  $\vec{r}_-$  est le barycentre du nuage électronique.

**1-b)** Supposons qu'il y ait un champ extérieur  $\vec{E}_0$  dans lequel est plongé l'atome. Prévoir et calculer la modification de la structure atomique induite par ce champ. Quel lien voyez-vous avec la notion de dipôle?

**2-**On cherche à calculer la force qui s'exerce entre un dipôle permanent (par exemple, une molécule d'eau) et une molécule polarisable (*i.e* susceptible d'acquérir un dipôle en présence d'un champ). Montrer par des arguments semi quantitatifs (utiliser uniquement les lois de variations des champs et dipôles) que l'énergie d'interaction varie comme  $R^{-7}$  où est la distance entre les atomes (on pourra commencer par écrire l'énergie potentiel d'un dipôle dans un champ électrique et le champ crée par un dipôle).

*Question subsidiaire* : l'énergie d'un dipôle permanent dans un champ électrique est-elle la même que l'énergie d'un dipôle induit dans un champ électrique?

#### 4.4 Etude de condensateurs

**1-**Donner la définition de la capacité d'un conducteur. Voyez-vous un lien avec le mot "capacité" et son sens commun? Connaissez-vous d'autres grandeurs physiques qui portent le même nom?

**2-**Calculer les capacités de condensateurs plan, sphérique et cylindrique. Commenter physiquement le résultat obtenu pour le condensateur plan (phénomène d'influence). Montrer qu'on retrouve le condensateur plan à partir du condensateur sphérique dans une limite que l'on précisera.

**2-**En faisant un bilan énergétique, montrer que l'énergie stockée dans le condensateur  $U$  vaut  $\frac{Q^2}{2C}$  et qu'elle s'identifie à  $\int \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2 d^3\vec{r}$  (où  $\vec{E}(\vec{r})$  est le champ électrique régnant dans le condensateur).

#### 4.5 Bilan énergétique d'un condensateur

On voudrait appliquer les concepts très généraux d'énergie électromagnétique au cas particulier bien connu du condensateur. Ca permettra ainsi de voir comment les équations de Maxwell décrivent en pratique un système particulier. On considère alors un condensateur cylindrique de rayon  $a$  et d'épaisseur  $e$  portant une charge  $Q$ . On travaillera dans le cadre l'ARQS et on négligera les effets de bord.

**1-**Déterminer les champs électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  dans le condensateur. On rappelle que l'on traite le cas général du régime variable :  $Q = Q(t)$ .

**2-**Comparer les énergies volumiques magnétique et électrique stockée dans le condensateur et conclure sur la nature de l'énergie du condensateur.

**3-**Calculer le vecteur de Poynting  $\mathbf{\Pi}$  et examiner son sens au niveau de la surface qui définit le volume du condensateur. Calculer le flux de  $\mathbf{\Pi}$  sur cette surface et vérifier le théorème de Poynting sur cette exemple.

**4-**A l'aide de ces calculs, expliquer pourquoi le condensateur voit son énergie varier pendant sa charge ou sa décharge uniquement (au contraire d'une résistance qui dissipe de l'énergie même en régime stationnaire).

#### 4.6 Bilan énergétique d'une bobine

On voudrait appliquer les concepts très généraux d'énergie électromagnétique au cas particulier bien connu d'une bobine. Ceci permettra ainsi de voir comment les équations de

Maxwell décrivent en pratique un système particulier. On considère alors une bobine cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $l$  ayant  $n$  spires par unité de longueur, traversée par un courant  $i$ . On travaillera dans le cadre l'ARQS et on négligera les effets de bord.

**1-**Déterminer le champ électromagnétique ( $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ) dans le solénoïde. On rappelle que l'on traite le cas général du régime variable :  $i = i(t)$ .

**2-**Comparer les énergies volumiques magnétique et électrique stockée dans la bobine et conclure sur la nature de l'énergie de contenue dans la bobine. En déduire, l'expression de l'inductance de cette bobine.

**3-**Calculer le vecteur de Poynting  $\mathbf{\Pi}$  et examiner son sens au niveau de la surface qui définit le volume de la bobine. Calculer le flux de  $\mathbf{\Pi}$  sur cette surface et vérifier le théorème de Poynting sur cette exemple.

**4-**A l'aide de ces calculs, expliquer pourquoi la bobine voit son énergie varier pendant un régime transitoire uniquement (au contraire d'une résistance qui dissipe de l'énergie même en régime stationnaire). Calculer un ordre de grandeur de l'énergie stockée dans une bobine pour  $I = 1$  A,  $l = R = 10$  cm,  $n = 5000$  m<sup>-1</sup>.

## 4.7 Etude de la pression électrostatique

**1-**Il paraît que la densité de charge  $\rho(\vec{r})$  dans un conducteur est nulle ... Ce fait se démontre-t-il? Pourquoi, physiquement, une charge ne peut pas exister dans un conducteur ?

**2-**Définir et expliquer le phénomène d'influence entre conducteur. Prendre pour application l'électroscope.

### La minute culturelle ...

Cet instrument rudimentaire a permis à Victor Hess (1883-1964) de montrer qu'il existe des rayonnement très ionisant qui nous viennent du ciel. Aujourd'hui, on les appelle "rayons cosmiques" et leur étude permet de comprendre certains objets astrophysiques relativement violents (trou noirs, explosions de Super Novae etc ...)

**3-**Nous voulons calculer la pression électrostatique subie par une surface  $\Delta S$  d'un conducteur. On écrira que le champ total au voisinage immédiat de  $\Delta S$ ,  $\vec{E}^{ext/int}$  est la somme de :

- $\vec{E}_1^{ext/int}$  créée par la surface  $\Delta S$  chargée (on notera  $\sigma$  sa distribution surfacique de charge).
- $\vec{E}_2^{ext/int}$  créée par l'ensemble des autres charges.

**3-a)** En considérant la surface  $\Delta S$  comme infinie, donner la forme des champs électriques  $\vec{E}_1^{ext}$  et  $\vec{E}_1^{int}$  en fonction de  $\sigma$ .

**3-b)** Exprimer les champs  $\vec{E}_2^{ext}$  et  $\vec{E}_2^{in}$  en utilisant une propriété des conducteurs parfaits.

**3-c)** Retrouver la formule qui relie la pression électrostatique à la distribution de charge  $\sigma$  en considérant que la surface  $\Delta S$  est plongée dans un champs électrique pertinentement choisi.

## 4.8 Évolution d'un faisceau d'électrons

Les faisceaux d'électrons interviennent dans un grand nombre de dispositifs (comme les télévisions, les accélérateurs de particules, le microscope électronique, etc ...). Il est donc important d'étudier leurs propriétés, ce que l'on propose dans cet exercice.

On considère un faisceau d'électrons infini de rayon  $R$ , dirigé suivant l'axe  $Oz$  (voir figure 9) et on cherche à comprendre comment ce faisceau va évoluer.

**1-**En vous rappelant que les électrons sont des particules chargées, déterminer les effets physiques qui vont modifier l'allure du faisceau.

**2-**Calculer les grandeurs qui vous semblent pertinentes pour étudier l'évolution du faisceau. Trouver une relation entre elles et la vitesse des électrons, notée  $\vec{v}$ .

**2-**Exprimer la force  $\vec{F}$  qui s'exerce sur un électron situé à une distance  $r$  de l'axe. En déduire une équation différentielle portant sur  $R(t)$  et discuter ses solutions et leur validité.

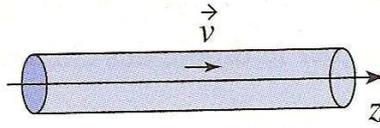


FIG. 9 – Géométrie du problème. Vue la complexité du système mieux vaut un schéma clair ...

#### 4.9 Mouvement d'une particule chargée dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$

1-En utilisant ce que vous connaissez de la mécanique et de l'électromagnétisme, expliquez comment vous pourriez mesurer la masse de particules chargées<sup>6</sup>.

##### La minute culturelle ...

L'élaboration des spectromètres de masse ont permis d'avancer dans la compréhension de la matière nucléaire; c'est à partir de la figure 10 que des modèles prédictifs ont été élaborés et ont expliqué le fonctionnement des étoiles ou les premières phases de l'univers. Ces avancées ont permis également d'ouvrir la voie à la physique des particules élémentaires qui explique, ni plus ni moins, de quoi on est fait et qui trouve aujourd'hui des applications (par exemple, en médecine).

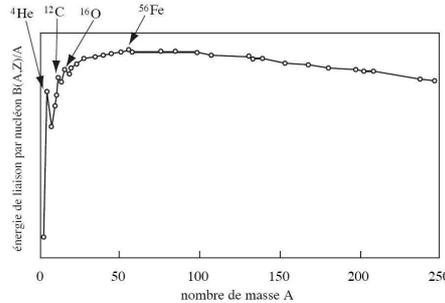


FIG. 10 – Energie de liaison par nucléon dans le noyau. Courbe obtenue expérimentalement par mesure de masse nucléaire puisque mesurer une énergie revient à mesurer une masse d'après l'équivalence masse-énergie.

2-Expliquer comment fonctionne un oscilloscope analogique<sup>7</sup>. En particulier, on fera le lien entre la hauteur du "spot" lumineux sur l'écran et la mesure d'une tension électrique.

#### 4.10 Principe d'un ampèremètre absolu

Pouvoir mesurer un courant électrique est un pas important pour la compréhension des phénomènes électromagnétiques. On décrit, dans cet exercice, un moyen de mesurer un courant grâce à une balance de Cotton<sup>8</sup> dont la figure 11 schématise le principe.

Pour comprendre le principe de l'expérience, on admettra qu'un élément  $d\vec{l}$  de conducteur traversé par un courant  $i$  plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est soumis à une force élémentaire, appelé force de Laplace :

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad ; \quad \vec{F} = \oint_{\text{Circuit}} d\vec{F}$$

1-Calculer le champ magnétique crée par un solénoïde infini parcouru par un courant  $i$  en un point  $M$  situé à l'intérieur du solénoïde. Que signifie "solénoïde infini" en pratique?

<sup>6</sup>Ceci n'est pas un sujet de philosophie mais bien un sujet de colle de physique : démonstrations et calculs sont attendus.

<sup>7</sup>Même remarque ...

<sup>8</sup>Aimé Cotton, physicien français 1869-1951

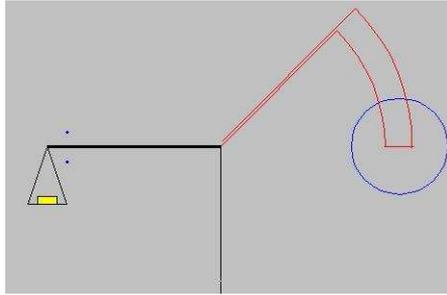


FIG. 11 – Le rond schématise un solénoïde vu par la tranche et le circuit rectangulaire (noté  $\mathcal{C}$  dans la suite) est traversé par un courant. Les deux bras de la balance sont de même longueur.

**2-** On suppose que le circuit  $\mathcal{C}$  de la balance est parcouru par le même courant  $i$ . Calculer la force totale que subit  $\mathcal{C}$ . Quelle est l'origine de cette force ?

**3-** Le système est doté d'un inverseur de courant qui permet de changer le courant qui traverse le circuit  $\mathcal{C}$ . On pose une masse  $m$  qui équilibre la balance lorsque le courant est  $+i$ , calculer la variation de masse  $\Delta m$  qu'il faut pour retrouver l'équilibre lorsque  $i \rightarrow -i$ . *A.N.* : il y a  $10^3$  spires par unité de longueur et  $i$  vaut 10 A.

**4-** Expliquer comment cet appareil permet de mesurer  $i$  connaissant la constante  $\mu_0$ . Quelles seront les limites de cette mesure, selon vous ?

Une simulation de la balance de Cotton est disponible à l'adresse suivante :

<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electri/cotton.html>

#### 4.11 Étude du dipôle magnétique

Dans cet exercice, on désire calculer le champ créé par une boucle de courant pour aboutir à la notion de dipôle magnétique. On pourra alors comparer les résultats obtenus au cas du dipôle électrique.

**1-** Considérons une boucle de courant linéique  $I$  et de rayon  $a$ . En utilisant la loi de Biot et Savart, calculer le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r})$  en un point  $\vec{r}$  de l'espace. On précisera l'hypothèse utilisée.

**2-** Donner, sans démonstration, les actions d'un champ magnétique extérieur sur un dipôle magnétique. On justifiera cependant chaque formule par un raisonnement physique.

**3-** Discuter les analogies et différences entre le dipôle magnétique et le dipôle électrique. Existe-t-il un monopôle magnétique ?

*Question subsidiaire* : on associe une énergie potentielle à une boucle de courant plongée dans un champ magnétique or la partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas ... Est-ce un paradoxe et pourquoi ?

#### 4.12 Interaction entre courant et champ magnétique

La découverte des lois de l'électromagnétisme a permis, entre autre, l'arrivée de l'énergie électrique, source de grands bouleversements technologiques et sociaux. Comprendre les interactions entre courant et champ magnétique a été une étape importante dans la manipulation de cette énergie. Nous nous proposons d'en étudier quelques-uns dans cet exercice.

**1-** A partir de la loi de Biot & Savart et la force de Lorentz, déterminer la force d'interaction entre deux particules chargées  $(q_1, \mathbf{v}_1)$  et  $(q_2, \mathbf{v}_2)$ . Vérifier que cette force ne satisfait pas la troisième loi de Newton. Proposer une explication.

**2-**Nous voulons, dans cette question, redémontrer l'expression de la force de Laplace à partir de la seule force existante en électromagnétisme : la force de Lorentz. On considère donc un volume de conducteur constitué d'un réseau ionique immobile ( $\rho_+, \mathbf{v}_+ = \mathbf{0}$ ) et d'une "soupe" d'électrons libres ( $\rho_-, \mathbf{v}_-$ ). Ce conducteur est plongé dans un champ électromagnétique ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ).

**2-a)** Ecrire la densité de charge totale  $\rho$  et la densité de courant totale  $\mathbf{j}$  qui règnent dans l'échantillon.

**2-b)** Ecrire la force de Lorentz qui s'exerce sur un petit élément de volume  $d\tau$  du conducteur et en déduire l'expression de la force de Laplace.

**3-**On veut donner une autre interprétation de cette force de Laplace en terme d'effet Hall pour montrer, de nouveau, l'unicité des phénomènes électromagnétiques.

**3-a)** Décrire qualitativement puis quantitativement l'effet Hall. On prendra un conducteur section rectangulaire et d'air  $a \times b$  qui est traversé par un courant  $\mathbf{j}$  et plongé dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

**3-b)** Réinterpréter la force de Laplace en terme du champ  $\mathbf{E}_H$ , champ de Hall.

#### 4.13 Exemple de freinage électromagnétique

L'induction possède de nombreuses applications comme par exemple la production d'énergie électrique (rien que ça ... !) ou le freinage par induction utilisé sur certains poids lourds. Nous nous proposons d'étudier cette dernière application sur un exemple académique.

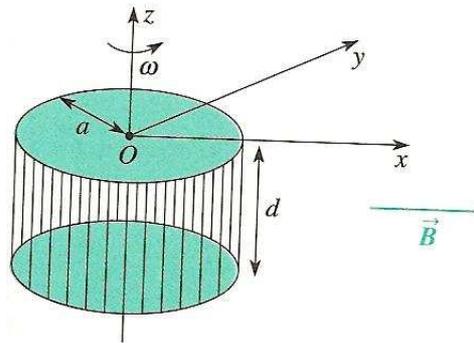


FIG. 12 – Schématisation du problème et notations

On considère deux disques de cuivre de rayon  $a$  distant de  $d$  étant reliés par  $N$  parallèles de résistance  $R$  (voir figure 12). On plonge l'ensemble dans un champ magnétique  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_x$  et on s'intéresse à la vitesse de rotation  $\omega$  de cet engin de moment d'inertie  $J$ .

**1-**Calculer la force électromotrice induite sur le fil  $i$  repéré par  $\theta_i$ . Montrer que la tension entre les deux disques  $u$  est nulle en utilisant la loi des noeuds et l'hypothèse que  $N \gg 1$  (on pourra également faire un schéma électrique équivalent pour raisonner).

**2-**Déterminer une équation d'évolution sur la vitesse de rotation du système  $\omega(t)$  en calculant le couple total qui s'exerce sur l'engin.

**3-**Selon vous, ce système pourrait permettre de modéliser quelle situation difficile à traiter de manière exacte? Donner d'autres exemples et applications de ces courants?

#### 4.14 Etude d'un supraconducteur : effet Meissner

Nous voulons étudier et justifier l'effet Meissner existant dans les milieux supraconducteurs en admettant qu'une seule chose : un porteur de charge ne subit aucune résistance à son déplacement. Cette seule affirmation et les équations de Maxwell vont naturellement aboutir à l'effet Meissner. Nous ferons également le lien avec l'induction électromagnétique.

**1-**Écrire le principe fondamental de la dynamique sur un porteur de charge d'un milieu supraconducteur plongé dans un champ électrique  $\mathbf{E}$ . Déterminer alors l'équivalent de la loi d'Ohm pour un milieu non résistif. Commentez.

**2-**Trouver une équation sur le champ magnétique  $\mathbf{B}$  régnant dans le supraconducteur. Définir une longueur caractéristique, appelée longueur de London et donner son interprétation.

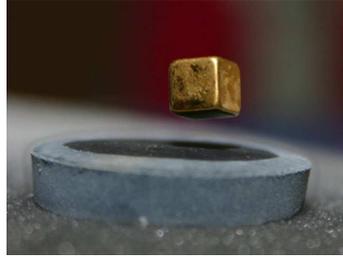


FIG. 13 – Lévitiation d'un aimant au dessus d'un supraconducteur ... quel est le lien avec le phénomène d'induction ?

**3-**On considère la géométrie suivante : une plaque supraconductrice occupant la zone  $-d \leq z \leq d$  est plongée dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_x$ . On supposera, que le champ extérieur n'est pas modifié par la présence de la plaque.

**3-a)** Résoudre l'équation différentielle précédente pour cette géométrie particulière.

**3-b)** Calculer la densité de courant associée à cette distribution de champ magnétique. Quelles sont les différences et analogies avec l'effet de peau vue sur les ondes électromagnétiques ?

**3-c)** Justifier que le champ magnétique extérieur n'est pas modifiée par la présence de la plaque.

**4-**En revenant à l'aspect microscopique de la modélisation, expliquer l'effet Meissner en terme d'induction électromagnétique. On explicitera l'importance d'avoir un échantillon supraconducteur.

## 5 Optique

### 5.1 Atome et lumière : une approche classique

Nous allons aborder une première approche de l'interaction entre lumière et matière grâce au concept d'oscillateur harmonique forcé. Ce problème est tout à fait fondamental puisqu'il régit toutes les phénomènes de création, de propagation, de transformation de la lumière, donc *tout ce qu'on voit* (la vue est le sens qui apporte le plus d'information sur le monde qui nous entoure).

**1-**Nous considérons un modèle de l'atome dans lequel l'électron subit une force de rappel sur le noyau (ce modèle sera justifié après). Nous nous placerons, pour simplifier le problème dans un cas unidimensionnel (voir figure 14).

**1-a)** En supposant que l'électron ait une vitesse  $\dot{x}_0$  et une position nulle à l'instant initial, donner la position de l'électron à chaque instant.

**1-b)** Si on imagine que l'atome est dans un gaz à l'équilibre thermique, quel est le phénomène qui pourrait, d'après vous, donner de telles conditions initiales ?

**2-**On aimerait maintenant comprendre comment cet atome se comporte lorsqu'il est placé dans un champ électrique oscillant à la fréquence  $\omega$ . On traitera le noyau comme étant fixe et seul l'électron sera mis en mouvement sous l'effet du champ  $E$ .

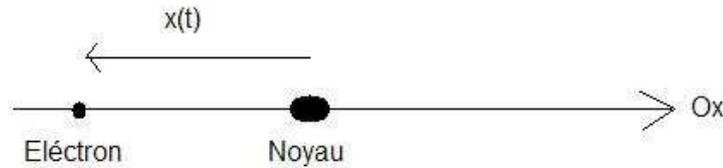


FIG. 14 – Modélisation (très) schématique d'un atome

**2-a)** Pourquoi cette situation correspond à étudier l'interaction entre la matière et la lumière ?

**2-b)** Déterminer le mouvement de l'électron pour chaque pulsation du champ  $\omega$ . Tracer la courbe  $|\underline{X}(\omega)|$ , module de l'amplitude complexe de  $x$ .

**2-c)** Justifier qu'il existe une pulsation particulière pour laquelle l'énergie du système diverge. Que faudrait-il rajouter dans notre modélisation pour palier à ce problème ? Interpréter cette divergence en faisant le lien avec les processus quantiques qu'on vous a décrit sur la lumière et les atomes.

**3-** On aimerait maintenant justifier la force de rappel que subit l'électron et exprimer la pulsation propre du système en fonction des constantes physiques qui interviennent dans le problème. On se re-place dans le cas tridimensionnel. On utilise le modèle de Thomson de l'atome : l'électron baigne dans une gelée chargée positivement dont la taille est donnée par le rayon de Bohr  $a_0$  et la distribution est à symétrie sphérique.

**3-a)** Calculer le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r})$  créée par cette gelée en tout point intérieur à la sphère (la charge totale est la même que celle de l'électron car l'atome neutre).

**3-a)** En déduire une expression de la constante de rappel et donc de la pulsation propre de l'atome donnée par le modèle. A quelle classe de phénomènes correspond cette échelle de temps ?

## 5.2 Equations de Maxwell et indice optique

Les équations de Maxwell peuvent, en principe, expliquer tout ce qui touche à l'électromagnétisme et donc à l'optique. C'est effectivement le cas et nous allons le voir sur le cas particulier de l'indice optique. Après l'étude de l'aspect mécanique de l'atome, nous nous pencherons sur les équations de Maxwell modifiée par la réponse atomique.

**1-** La matière est faite d'espèces chargées qui se lient pour former des atomes. Sous l'effet d'un champ électrique oscillant (d'une onde lumineuse), ces charges seront mises en mouvement et rayonneront un champ électrique. Nous voulons lier la réponse (le dipôle oscillant) à l'excitation (l'onde lumineuse).

**1-a)** En adoptant le modèle de Thomson mono-électronique pour l'atome, écrire le principe fondamentale de la dynamique qui régit le mouvement de l'électron. On introduira une pulsation caractéristique  $\omega_0$  et un facteur de pulsation  $Q$ .

**1-b)** Déterminer la polarisabilité électronique  $\alpha_e(\omega)$  définie par :

$$\mathbf{p}(\omega) = \epsilon_0 \alpha_e(\omega) \mathbf{E}_0(\omega)$$

**2-** Ce dipôle  $\mathbf{p}(\omega)$  oscillant à  $\omega$  va rayonner un champ électrique  $\mathbf{E}_{ray}(\omega)$ . Le champ total est alors la somme du champ incident et du champ rayonné. C'est une approche possible pour dériver l'indice optique (voir *le Cours de Physique de Feynman*, Mécanique 2). Nous adoptons une approche équivalente mais moins transparente physiquement et ce, pour des raisons techniques.

**2-a)** On définit le vecteur polarisation  $\mathbf{P}$  comme le dipôle électrique  $d\mathbf{p}$  par unité de volume  $d\tau$  :

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}$$

Déterminer le vecteur polarisation associé à un échantillon qui contient  $n_e$  atomes (les mêmes que ceux de la question précédente) par unité de volume en fonction de  $\mathbf{E}_0$  et de  $\chi_e \equiv n_e \alpha_e$  susceptibilité électrique.

**2-b)** On peut montrer qu'il existe une densité de charge  $\rho_{pol}(\mathbf{r})$  et de courant  $\mathbf{j}_{pol}$  associée à un vecteur polarisation (à une assemblée de dipôles). Plus précisément :

$$\rho_{pol}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{j}_{pol} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

Comment ces sources *effectives*<sup>9</sup> modifient-elles les équations de Maxwell ? Déterminer alors l'équation de propagation vérifiée par  $\mathbf{E}$  dans un milieu diélectrique.

**2-c)** Dédurre une expression de l'indice optique  $n$  en fonction des paramètres microscopique du matériaux considéré.

**3-**Nous voudrions savoir si notre approche permet d'expliquer les faits expérimentaux. Nous allons donc essayer de retrouver la loi de Cauchy qui donne la fonction  $n(\lambda)$ .

**3-a)** Exprimer la partie réelle  $\chi_1$  et la partie imaginaire  $-\chi_2$  de la susceptibilité en fonction de  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $\chi_0 = \frac{n_e q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2}$ .

**3-b)** Physiquement à quoi correspond la partie imaginaire et la partie réelle de  $\chi$  (donc de l'indice) ? On pourra se souvenir du lien entre le vecteur d'onde complexe et l'indice optique complexe.

**3-c)** Pour un milieu transparent, on fait l'hypothèse que l'indice est réel. En sachant que les atomes ont des transitions électronique dans l'UV (c'est à dire :  $\omega_0 \gg \omega_{visible}$ ), faire un développement limité de  $\chi_1$  et retrouver la loi de Cauchy.

**3-d)** Connaissez-vous des manifestations expérimentales de cette loi ?

### 5.3 Lois de Snell-Descarte et Principe de Fermat

Nous proposons de faire le lien entre la principe de Fermat et les lois de Snell-Descartes. Nous allons, en particulier, démontrer la loi de la réfraction et de la réflexion à partir du seul principe de Fermat.

**1-**Donner la définition du chemin optique et la relier aux grandeurs de nature ondulatoire. Quelle est l'origine physique de l'indice optique ? Énoncer le principe de Fermat.

**2-**Dédurre les lois de la réflexion du principe de Fermat, d'abord sans calcul puis avec un calcul (on pourra considérer deux point A et B objet et image l'un de l'autre, et le point M du miroir où arrive le rayon lumineux).

**3-**Nous considérons à présent une image en A (dans un milieu d'indice  $n_1$ ) qui envoie un rayon en B (dans un milieu d'indice  $n_2$ ) et nous voulons savoir quelle est le trajet du rayon lumineux.

**3-a)** Exprimer le chemin optique en fonction de  $x$ ,  $l$ ,  $h$  et  $h'$ .

**3-b)** Appliquer le principe de Fermat et conclure.

**3-c)** Quelle est la trajectoire la plus rapide pour un sauveteur situé sur la plage qui doit sauver une personne se noyant dans la mer ? On supposera que le sauveteur, aussi bon nageur soit-il, se déplace moins vite dans l'eau que dans l'air

...

<sup>9</sup>Effective car il équivaut de considérer des densités nulles en sommant les champs rayonnés par les dipôles au champ incident, et, d'oublier les champs rayonnés mais d'ajouter ces termes sources.

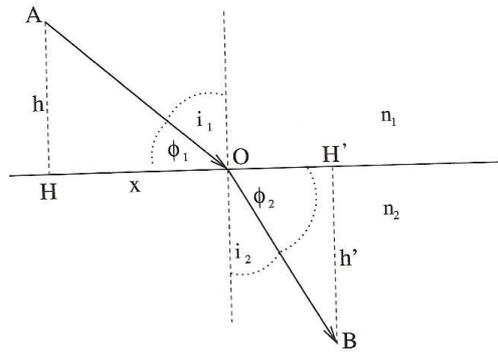


FIG. 15 – Notations pour la réfraction d'un rayon lumineux à la traversée d'un dioptre. On note  $l$  la distance  $HH'$

## 5.4 Généralités sur la diffraction

Le but de cet exercice est de passer en revue quelques généralités sur la diffraction en insistant sur le sens physique des équations. L'approximation de Fraunhofer sera détaillée et appliquée au cas d'une fente.

**1-**Enoncer le principe d'Huygens Fresnel et écrire l'amplitude diffractée  $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$  par une ouverture  $\Sigma$  en un point  $\mathbf{r}$  à un facteur près. On précisera et on justifiera avec soin l'origine de chacun des termes de  $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$ .

**2-**Que mesure-t-on en optique? Quelle grandeur pertinente doit-on alors calculer?

**3-**Quelle est l'approximation de Fraunhofer? Passer de la forme de Huygens Fresnel à  $\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{r}, t)$ , amplitude de Fraunhofer, en justifiant chaque étape.

**4-**Quelles sont les propriétés importantes de la figure de diffraction dans l'approximation de Fraunhofer?

**5-**Calculer l'amplitude diffractée dans l'approximation de Fraunhofer par une fente rectangulaire de section  $a \times b$ . Calculer alors l'intensité obtenue dans une direction donnée  $I(\alpha, \beta)$ . On fera une figure avec des notations claires et explicitées. Commentez le résultat.

## 5.5 Notion de filtrage spatial

Nous exposons dans cet exercice une application très importante de la diffraction pour le traitement d'image. Nous commencerons par rappeler les fondements de la théorie puis nous traiterons un cas particulier bien choisi dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer, que l'on définira.

**1-**Enoncer le principe d'Huygens Fresnel en donnant son sens physique. Qu'est-ce que l'approximation de Fraunhofer? Comment s'écrit l'amplitude diffractée  $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$  dans le cadre de cette approximation?

**2-**Définir la fonction transparence  $t(\mathbf{r})$  d'un objet en interprétant son module et sa phase. En donner des exemples simples. Ecrire  $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$  pour le cas d'une transparence quelconque. Quelle opération mathématique relie la figure de diffraction à l'objet (décrit par sa fonction transparence)?

**3-**On s'intéresse à l'amplitude diffractée par une grille infinie. Soit une plaque infini possèdent des "trous" de forme carrée de côté  $a$  disposés régulièrement. On note  $b$  la distance entre deux trous (évaluée par rapport au centre des trous).

**3-a)** Faire un schéma de l'objet diffractant faisant apparaître les notations.

**3-b)** Exprimer la fonction transparence de cet objet uniquement grâce à  $t(x)$ ,

fonction porte de largeur  $a$  (pour se faire la main, on peut traiter le cas unidimensionnel avec une seule rangée de trous).

**3-c)** Ecrire l'amplitude diffractée sous la forme d'une somme d'intégrales. En faisant un changement de variable judicieux, faire apparaître l'intensité diffractée par un seul trou.

**3-d)** D'après la question 2, comment la figure de diffraction est-elle reliée à l'objet diffractant ?

**4-** Supposons que l'on puisse obtenir l'objet diffractant comme image de la figure de diffraction à travers un montage d'optique adéquate.

**4-a)** De quelle manière pourriez-vous alors modifier l'image de la grille ? (on pourra s'appuyer sur la notion de filtrage en électrocinétique)

**4-b)** Comment faire pour que l'image ne contienne plus les traits verticaux ou horizontaux ?

**4-c)** Peut-on envisager un filtrage qui permettrait de voir uniquement les variations de la transparence de l'objet ? Ce type de filtrage s'appelle la strioscopie.

## 5.6 Généralités sur les interférences

Dans cet exercice nous voulons retrouver quelques caractéristiques du phénomène d'interférences en optique. Nous tenterons de justifier pourquoi ce phénomène ne s'observe que dans des conditions assez particulières et donc absent de la vie courante.

**1-** Nous allons commencer par traiter le cas de deux vibrations scalaires synchrones (de même fréquences) pour retrouver les notions du cours. On considère deux sources ponctuelles synchrones  $S_1$  et  $S_2$ , et un point  $M$  d'observation.

**1-a)** Faire un petit schéma. Quel est le type d'onde émise par une source ponctuelle ? Quelle est l'amplitude réelle au point  $M$  de l'onde lumineuse émise par  $S_1$  ? Par  $S_2$  ? On se souviendra que les sources n'émettent pas nécessairement avec la même origine des phases.

**1-b)** Quelle est l'amplitude totale au point  $M$  (il sera inutile de calculer explicitement cette expression) ?

**1-c)** Calculer l'intensité au point  $M$  (*i.e* le carré de l'amplitude totale moyennée dans le temps) sans passer par la notation complexe. Comment définir le phénomène d'interférences en une phrase ?

**1-d)** Définir la notion de déphasage. Exprimer le déphasage de deux manières différentes mais équivalentes (une temporelle et une spatiale).

**1-e)** La conservation de l'énergie est-elle violée ? Pourquoi il n'y a pas de lumière en certain point  $M$  ?

**2-** Nous traitons maintenant le cas de deux sources non synchrones pour exhiber certaines conditions d'interférences. Nous noterons  $\omega_i$  la pulsation de la source  $S_i$ .

**2-a)** Reprendre les questions précédentes jusqu'à obtenir l'intensité totale en fonction de  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et d'un déphasage  $\Delta\phi_{geo}$  dit géométrique.

**2-b)** Calculer l'intensité et comparer l'expression obtenue à celle de la question 1-c). L'intensité est-elle la même en chaque point  $M$  ? A chaque instant  $t$  ?

**2-c)** Sachant qu'un détecteur moyenne l'intensité sur une temps caractéristique  $\tau_d$ , discuter l'influence du détecteur sur le phénomène d'interférences.

## 5.7 Mesure d'une distance angulaire entre deux étoiles (cohérence spatiale)

Nous présentons comment mesurer le diamètre angulaire entre deux étoiles (vues depuis la terre<sup>10</sup>) à partir d'expérience interférométriques. Ce sera l'occasion de revenir sur la no-

<sup>10</sup>on s'en doute un peu quelque part ...

tion de cohérence spatiale pour essayer de mieux la saisir.

**1-**On considère le dispositif des fentes d'Young éclairée par une fente source infiniment fine *située à l'infini*. Les deux fentes sont espacées de  $a$  et on notera  $f$  la focale de la lentille qui permet l'observation.

**1-a)** Faire un schéma avec le tracé des rayons.

**1-b)** Calculer l'intensité en un point  $M(x, y)$  de l'écran.

**1-c)** Comment serait modifiée la situation pour une fente de largeur  $b$  située à l'infini au niveau du tracé des rayons? De la figure d'interférence?

**1-d)** Expliquer par un raisonnement la notion de cohérence spatiale.

**2-**Une lunette astronomique est constituée d'un objectif  $L_1$  assimilable à une lentille mince de distance focale  $f = 1m$ , et d'un oculaire  $L_2$  mis au point sur le plan focal de  $L_1$ . Par une nuit claire, on la dirige vers une étoile double contenant  $S_1$  et  $S_2$  que l'on supposera ponctuelles étant donné leur éloignement. Elles émettent une même lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  et leurs intensités sont respectivement  $I_0$  et  $I'_0$ . La face d'entrée de l'objectif est masquée par un écran  $E$  percé de deux fentes fines et parallèles, notées  $F_1$  et  $F_2$ , dont on peut faire varier l'écartement  $e$ .

**2-a)** Les ondes lumineuses émises par  $S_1$  et  $S_2$  sont-elles cohérentes? Comment va-t-on alors calculer la figure d'interférence?

**2-b)** Faire un schéma en traçant les rayons lumineux (on notera  $2\epsilon$  l'angle qui sépare les deux étoiles). Calculer l'intensité en un point  $M(x, y)$  du plan focal image de  $L_1$ . Calculer numériquement l'interfrange pour  $e = 6 \text{ mm}$  et  $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ .

**2-c)** Montrer que les franges d'interférences disparaissent pour une certaine valeurs de  $e$ . Expérimentalement, les franges sont brouillées pour  $e = 52 \text{ mm}$ , en déduire la distance angulaire entre les deux étoiles.

## 5.8 Interférométrie et physique atomique

Nous allons illustrer une méthode interférométrique très générale à travers un cas d'école de cohérence temporelle. Pour cela, nous reprendrons les légendaires fentes d'Young mais en lumière polychromatique. L'idée est la suivante : nous voudrions, à partir d'une expérience, déterminer *comment* est répartie l'énergie sur les différentes fréquences. Cette branche de l'optique, appelée spectroscopie, est extrêmement importante puisqu'elle permet *l'étude microscopique du fonctionnement de l'atome* (donc découverte de la mécanique quantique ...)!

**1-**Mais, avant de partir dans les fin fonds de la spectroscopie, quelques points de cours sont demandés.

**1-a)** Faire un schéma du dispositif des fentes d'Young en notant  $a$  la distance entre les deux fentes et  $D$  la distance fentes-écran.

**1-b)** Calculer l'intensité en un point  $M(x, y)$  de l'écran sachant que les fentes sont éclairées par une fente infiniment fine et que la lumière est monochromatique.

**1-c)** Après ce petit échauffement, faire la même chose avec une lumière qui à un profil spectral rectangulaire centré autour de  $\sigma_0$  et de largeur  $\Delta\sigma$ . Discuter le résultat obtenu.

**1-d)** Trouver une opération mathématique qui relie la partie variable de l'intensité et le profil spectral de la source (indication : le profil spectral peut s'écrire comme une convolution d'un Dirac et d'une fonction porte).

**1-e)** Quelle peut-être l'origine de cette largeur spectrale pour une lampe spectrale utilisé en TP par exemple? Connaissez-vous un modèle qualitatif qui explique simplement le brouillage des franges?

**2-**Nous allons essayer de généraliser le lien formel qui existe entre  $I(\delta)$ , appelé interférogramme et profil spectral pour comprendre comment on étudie de la lumière inconnue.

**2-a)** Ecrire l'intensité en  $M$  pour un profil spectral complètement général  $\mathcal{F}(\sigma)$ . Préciser alors le lien évoqué précédemment.

**2-b)** Tester la formule générale avec le cas particulier d'une lumière monochromatique et d'une lumière composée de 2 longueur d'onde. Retrouvez-vous vos résultats de cours ?

**3)** Petite application. Les lampes spectrales utilisées en TP possèdent des spectres discrets mais chaque raie possède une certaine largeur et donc un profil spectral. En repensant au modèle de l'électron élastiquement lié, essayer de prévoir la forme de l'interférogramme obtenu pour une lampe spectral.